LÖSNINGAR MSG100 SANNOLIKHETSTEORI 1, DEL 1, GU 2012-11-01. AV OLLE NERMAN.

1. a. TOTALA SANNOLIKHETSLAGEN $\Rightarrow$ P(KNÄSKADA) $\approx 0,5 \times 0,22 + 0,15 * 0,45 + 0,30 \times 0,37 + 0,05 \times 0,54 = 0,3155 \Rightarrow \approx 31,55\%$

b. VARIANT AV BAYES FORMEL (+ TOTALA SANNOLIKHETSLAGEN) $\Rightarrow$ P(PATIENT YNGRE ÄN 30 ÅR | PATIENT HAR KNÄSKADA) =

$(0,5 \cdot 0,22 + 0,15 \cdot 0,45)/0,3155 \approx 0,56$

---

2. a. ANTALET SÄTT ATT VÄLJA DE 4 PARKERINGSPLATSERNA $= \binom{12}{4}$ [INGEN ORDNING MELLAN BILARNA]. ANTALET SÄTT SOM ÄR GYNNSAMMA FÖR HÄNDELSEN ATT DE HAMNAR I RAD = 9

SVARET BLIR ALLTSÅ $9/\binom{12}{4} = \frac{1}{11}$

---

3. a. $E[X] = \lambda = 6 \Rightarrow M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{\lambda(e^t - 1)} = e^{6(e^t-1)}$

b. $M'(t) = \lambda e^t \cdot e^{e^t\lambda - \lambda} = \lambda e^{e^t\lambda - \lambda + t} \Rightarrow M'(0) = E[X] = \lambda = 6$

$M''(t) = \ldots = \lambda^2 e^{e^t\lambda - \lambda + 2t} + \lambda e^{e^t\lambda - \lambda + t} \Rightarrow M''(0) = \lambda^2 + \lambda = 42$

PÅ LIKNANDE VIS $M'''(0) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda = 330$

---

4. a. $Z \sim$ BINOMIALF$(30, 0,3) \Rightarrow VAR[Z] = 30 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 6,3$

b. $KOV[X, Z] = KOV[X, X+Y] = KOV[X, X] + \underbrace{KOV[X, Y]}_{=0 \text{ P.G.A. OBER.}} =$

$= KOV[X, X] = VAR[X] = 10 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 2,1$

c. $\rho_{X,T} = \frac{KOV[X,T]}{\sqrt{VAR[X]}\sqrt{VAR[T]}} = \frac{-KOV[X,Z]}{\sqrt{VAR[X]}\sqrt{VAR[Z]}} = \frac{-2,1}{\sqrt{2,1 \times 6,3}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0,577$

d. $P(T=t) = P(Z=-t) = \begin{cases} \binom{30}{-t} p^{-t}(1-p)^{30+t} & \text{FÖR } t = 0, -1, -2, \ldots, -30, \\ 0 & \text{F.Ö.} \end{cases}$

---

5. a. $f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{F.Ö.} \end{cases}$ $\quad f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{2y} & y \leq 0 \\ 0 & \text{F.Ö.} \end{cases}$

$\Rightarrow f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx = \int_z^{\infty} 4 \cdot e^{-2x} e^{2(z-x)}\,dx = e^{-2z}$ FÖR $z \geq 0$

SYMMETRI $\Rightarrow f_Z(z) = e^{2z}$ FÖR $z \leq 0$

b. $P(Z \leq 2) = P(Z \leq 0) + P(Z \in [0, 2]) = \frac{1}{2} + \int_0^2 e^{-2z}\,dz =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-4}) = 1 - \frac{1}{2}e^{-4} \approx 1 - 0,00916 \approx 0,99084$

LÖSNINGAR MSG 100 . DEL 1 . 2012-11-01 FORTS.

6. $G(y) = F(y)^{10}$, DÄR $F(y)$ ÄR FÖRDELNINGSFUNKTIONEN FÖR DE URSPRUNGLIGA VARIABLERNA, DETTA MEDFÖR ATT $F(y) = G(y)^{\frac{1}{10}}$ SÅ ATT $f(y) = F'(y) = \dfrac{G'(y)}{10 \cdot G(y)^{9/10}} =$

$$= \frac{g(y)}{10\,(G(y))^{9/10}}$$

7. a. $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$ SKALL VISAS. EFTERSOM $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ SÅ FÖLJER ATT $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1$, TY ALLA SANNOLIKHETER ≤ 1, SÅ ÄVEN $P(A \cup B)$.

b. $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq \dfrac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)}$ ENLIGT a.

(+ H.L. $\Leftrightarrow$ OLIKHETEN)

8. U LIKFORMIGT FÖRDELAD $[a, b] \Rightarrow E[U] = \frac{a+b}{2}$ $\mathrm{Var}[U] = \frac{(b-a)^2}{12}$

$\Rightarrow$ Y_i = LÄNGD PÅ BIL i + UTRYMMET FRAMFÖR BIL i, $i = 1, \ldots, 27$

HAR VÄNTEVÄRDEN 430 CM OCH VARIANSER

$\left(50^2 + \frac{20^2}{12}\right)$ CM^2

CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN KAN ANVÄNDAS FÖR $\sum_{i=1}^{27} Y_i/100 \approx$ NORMALFÖRDELAD $(116{,}1\,;\ 6{,}84)$ ← METER

BILEN FÅR PLATS OM $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{27} Y_i}{100}\right) \leq 125 - 6 - 0{,}2 \Longrightarrow$

$$P(\text{BILEN FÅR PLATS}) \approx \Phi\left(\frac{118{,}8 - 116{,}1}{\sqrt{6{,}84}}\right) \approx 85\ \%$$